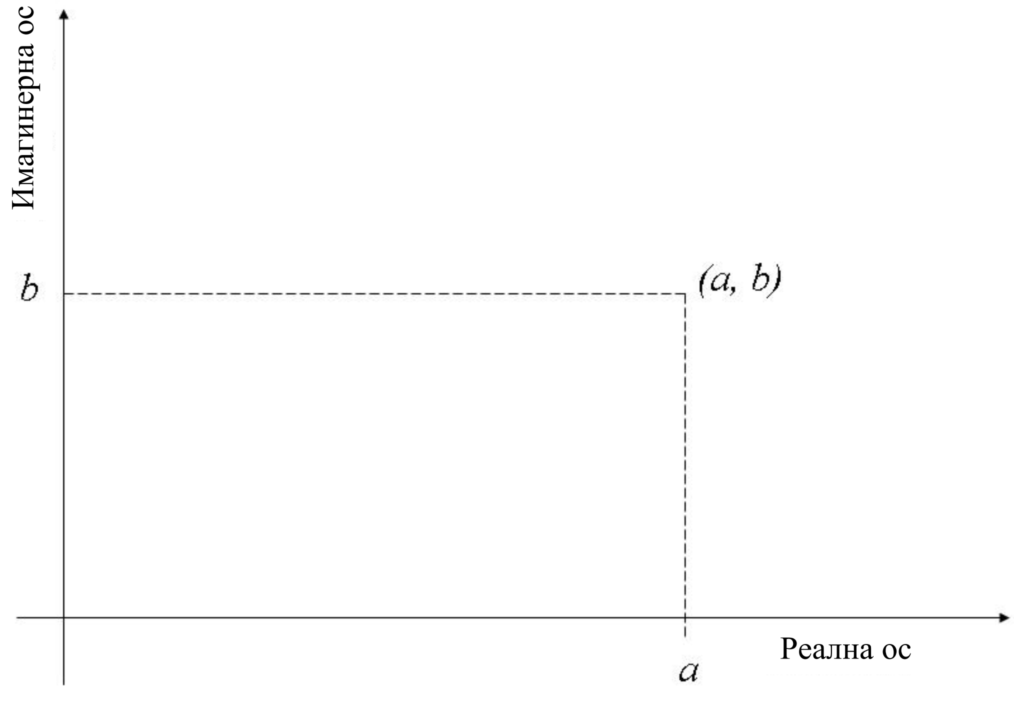
Комплексни числа

1 Въведение

Едно **комплексно число** z е комбинация от реално число и имагинерно число и се записва във вида $z = a + ib$ или $z = a + bi$. Тук a е нарича **реална част** на z, а b се нарича **имагинерна част** на z. Когато $a = 0$, z се нарича **чисто имагинерно** число, а когато $b = 0$, z се нарича чисто реално число. Две комплексни числа са равни, тогава и само тогава, когато реалните им и имагинерните им части са равни, т.е. ако $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$ и $z_1 = z_2$, то $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

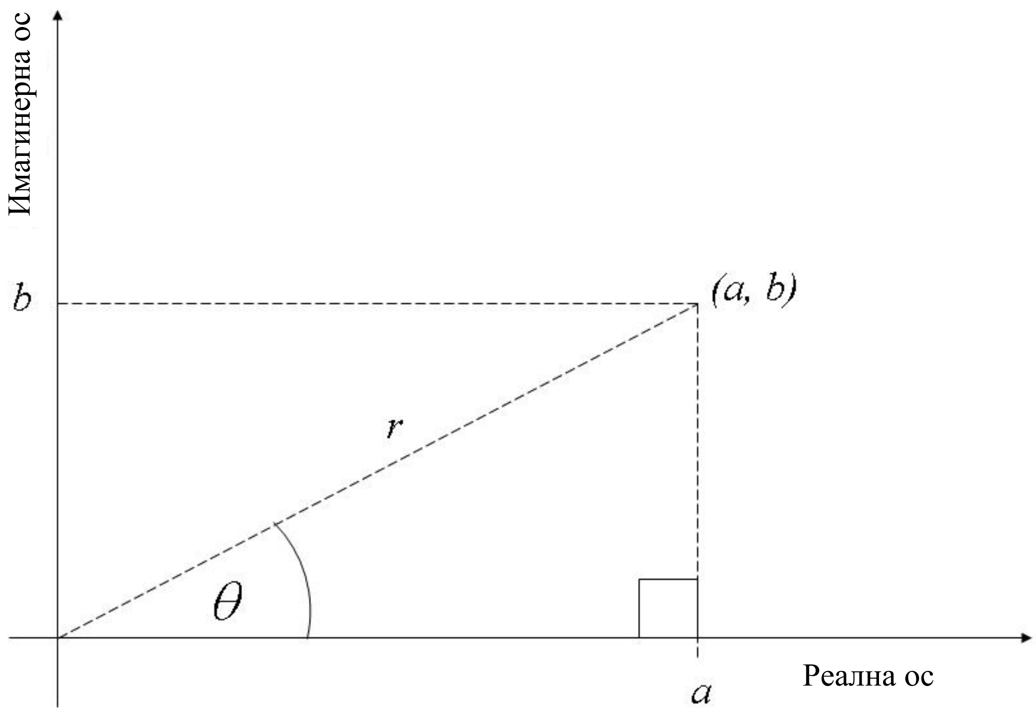
2 Диаграма на Арганд



Най-лесният начин за за геометрично представяне на комплексното число е да се използва диаграма на Арганд (виж горе). Точката $(a,\ b)$ представя комплексното число $a + ib$. Всички чисто реални числа се намират по реалната ос, а всички чисто имагинерни числа се намират по имагинерната ос. Множеството от всички точки, представящи всички комплексни числа се нарича **комплексна равнина**.

3 Модули и аргументи

Като алтернатива на декартовите координати, точката $(a,\ b)$ може да се определи чрез дължината на отсечката, съединяваща началото на координатната система с точката и ъгълът, който тази отсечка сключва с положителната посока на реалната ос (виж диаграмата по-долу).



Дължината на отсечката r се нарича **модул** на z и се бележи или с $\operatorname{mod} z$ или с $|z|$. Ъгълът θ се нарича аргумент на z, отбелязва се с $\arg z$. Тъй като $(r,\ \theta),\ (r,\ \theta+2\pi),\ (r,\ \theta+4\pi),\ \ldots$ всичките представят едно и също число, удобно е да се спазва интервал за аргумента $-\pi < \theta \leqslant \pi \ \left(-\ 180^\circ < \theta \leqslant 180^\circ\right)$. Тази стойност се нарича **главна стойност** на аргумента. Ще отбележим, че от теоремата на Питагор $a^2 + b^2 = r^2$, следователно $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Освен това, $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$, откъдето $\theta = \operatorname{mod} z = \tan^{-1}\dfrac{b}{a}$. Трябва да се внимава, когато се изчислява аргумента. Например, ако точката е в трети квадрант, тогава и двете числа a и b са отрицателни, $\tan^{-1}\frac{b}{a}$ дава значението на ъгъла в първи квадрант, докато истинската стойност е $-\left(\pi-\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$.

3.1 Примери

Определете модула и аргумента на z, където $z=$

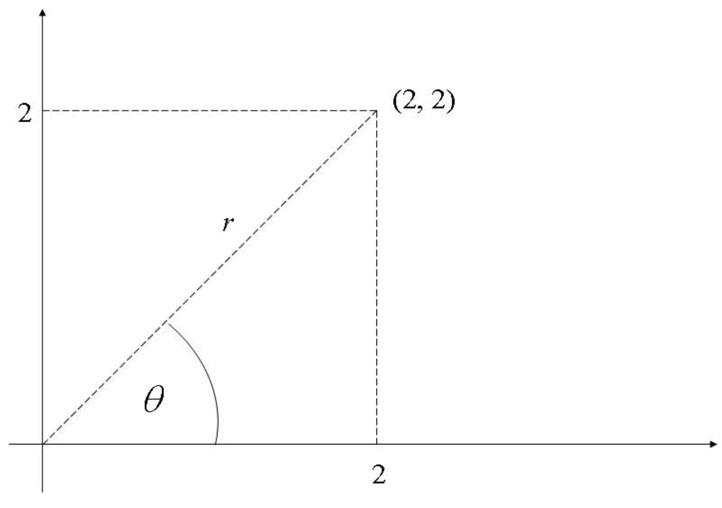
а) $2+i2$

б) $3-i4$

с) $-1-i$

Решения:

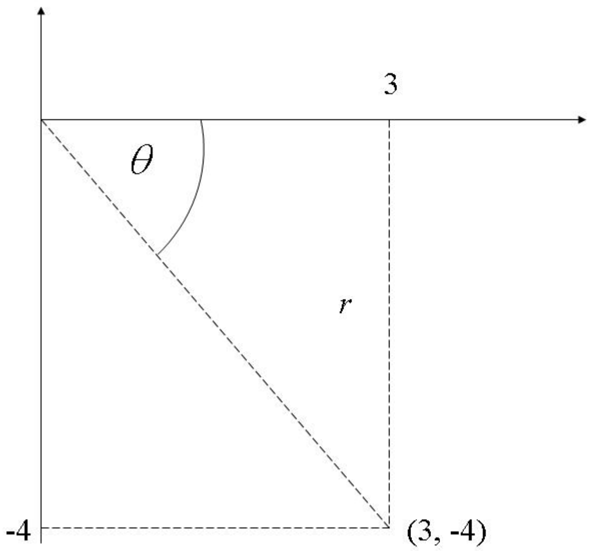
а) Добре е, ако за всеки от случаите използваме диаграма на Арганд.



$$|z|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}.$$

$$\arg z=\tan^{-1}\frac{2}{2}=\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}\text{ radians }\left(45^{\circ}\right).$$

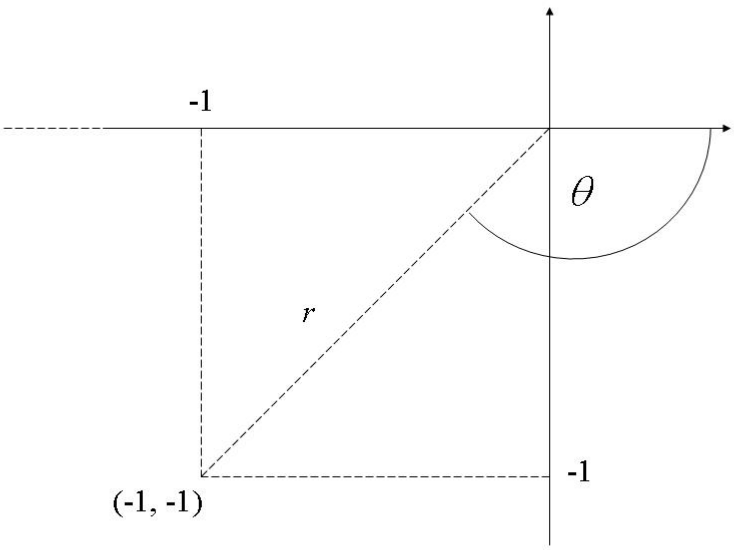
б)



$$|z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

$$\arg z = \tan^{-1} \frac{-4}{3} = -0.927 \text{ radians} \left(-53.13^\circ\right).$$

в)



$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

Погледнете в диаграмата на Арганд – точката е в трети квадрант. Имаме

$\tan^{-1} \frac{-1}{-1} = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4} \text{ radians } (45^\circ)$ - аргументът на z тогава е

$\arg z = -\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3\pi}{4} (-135^\circ)$.

4 Тригонометричен вид на комплексните числа

Като се използва елементарна тригонометрия може да се види, че $a = r\cos\theta$ и $b = r\sin\theta$.

Следователно, всяко комплексно число може да се запише в алтернативен вид:

$z = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Това се нарича **тригонометричен вид** на комплексното число (различно от декартовия ви, показан по-горе) и често се отбелязва с $r \angle \theta$ или $r\,\mathrm{cis}\theta$.

4.1 Примери

Представете в тригонометричен вид следните комплексни числа:

а) $2 + i2$

б) $3 - i4$

в) $-1 - i$

Решения:

Модулът и аргументът на тези числа вече бяха изчислени в 4.2.1. по-горе.

а) $|z| = 2\sqrt{2}$, $\arg z = \frac{\pi}{4}$.

Следователно, z може да се запише в тригонометричен вид като:

$$2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

б) $|z| = 5,\ \arg z = -0.927$.

Следователно, z има следния тригонометричен вид.

$$5\{\cos(-0.927)+i\sin(-0.927)\} = 5\{\cos(0.927)-i\sin(0.927)\}.$$

в) $|z| = \sqrt{2},\ \arg z = -\frac{3\pi}{4}$.

Можем да запишем z в тригонометричен вид така:

$$\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right\} = \sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right\}.$$

Отбележете, че макар $\arg z$ да е отрицателен, ние го преобразуваме в в положителна стойност при записа в тригонометричен вид.

4.2 Преобразуване от тригонометричен вид в декартови координати

Докато превръщането от декартови координати в тригонометричен вид е просто, превръщането от тригонометричен вид към декартови координати е може да е по-трудно. Пак ще ползваме диаграмите на Арганд.

4.3 Примери

Изразете следните комплексни числа в декартови координати:

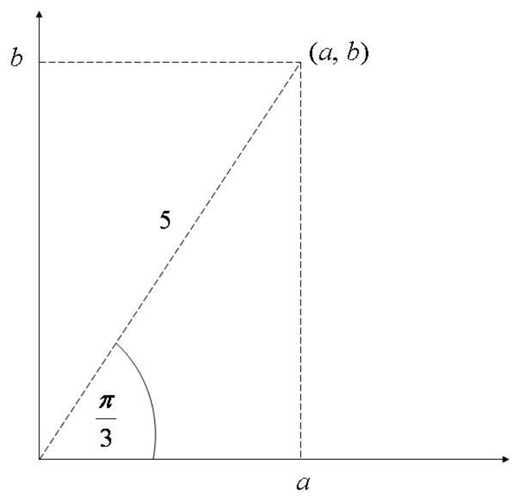
а) $5\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}$

б) $8\left\{\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right\}$

в) $7\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$

Решения:

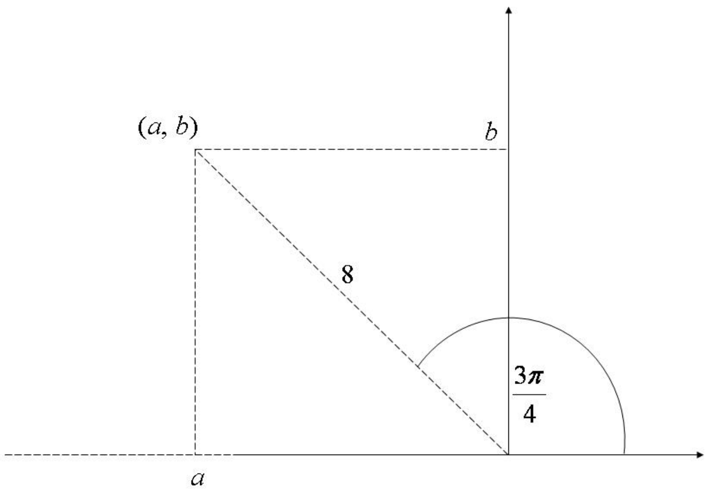
а) Синус и косинус са положителни и $\arg z < \frac{\pi}{2}$, т.е. точката е в първи квадрант.



Стойността на a е $a = 5\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2.5$, а тази на b е $b = 5\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4.33$.

Следователно, в декартови координати получаваме $5\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\} = 2.5 + i4.33$.

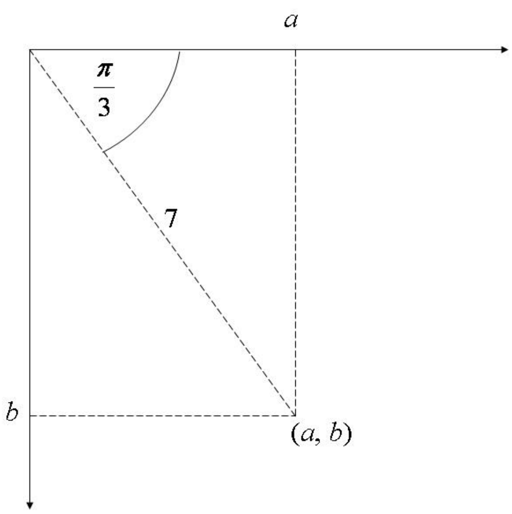
б) Едновременно синус и косинус са полжителни и $\frac{\pi}{2} < \arg z < \pi$, така че точката е във втори квадрант.



Стойността на a е $a = 8\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 8 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4\sqrt{2} = -5.66$.

Стойността на b е $b = 8\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2} = 5.66$. Комплексното число в декартови координати става $-5.66 + i5.66$.

в) В този случай синус и косинус са положителни и $-\frac{\pi}{2} < \arg z < 0$, значи точката е в четвърти квадрант.



Стойността на a е $a = 7\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 3.5$, а стойността на b е

$b = 7\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 7 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -6.06$.

Следователно, в декартови координати имаме:

$7\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\} = 3.5 - i6.06$.